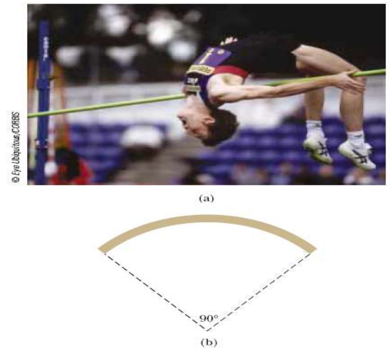
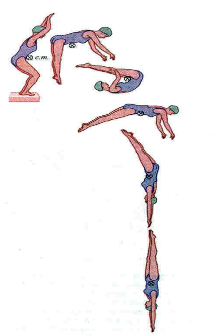
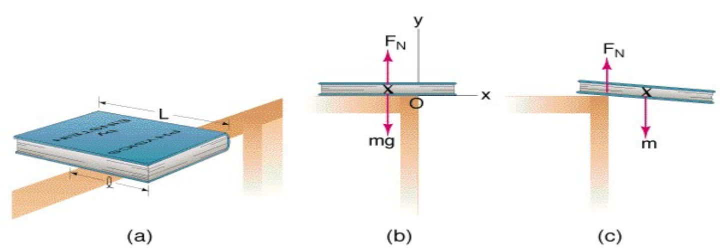
Zasady dynamiki
układ wielu ciał

Środek masy



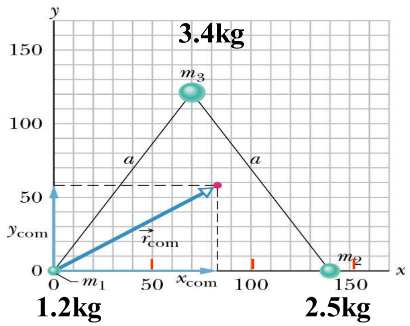


Środek masy



Środek masy

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + \ldots + m_n}$$

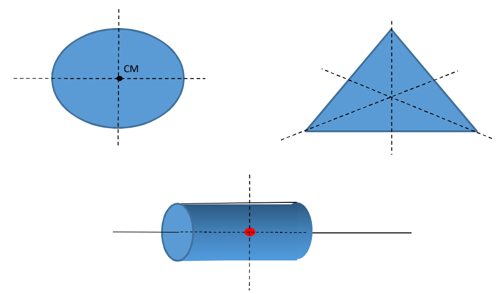


$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1.2\cdot 0 + 2.5\cdot 140 + 3.4\cdot 70}{7.1} = 83\ cm$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 58\ cm$$

Środek masy –jednorodnych ciał symetrycznych

Środek masy jednorodnego ciała znajduje się w jego środku symetrii



Ruch środka masy

- współrzędna środka masy :

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + \ldots + m_n}$$

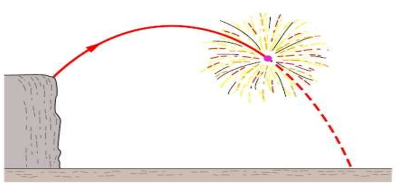
- prędkość i pęd środka masy :

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\Delta\vec{r}_{cm}}{\Delta t} = \frac{m_1\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t_1} + \ldots + m_n\frac{\Delta\vec{r}_n}{\Delta t_n}}{m_1 + \ldots + m_n} = \frac{m_1\vec{v}_1 + \ldots + m_n\vec{v}_n}{m_1 + \ldots + m_n}$$

- przyspieszenie środka masy :

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \frac{m_1\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + \ldots + m_n\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}}{m_1 + \ldots + m_n}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}(\vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_n) = \frac{1}{M}\vec{F}_{wyp}$$



Rys. 9.5. W czasie pokazu ogni sztucznych rakieta eksploduje w locie. Jeśli pominiemy opór powietrza, to środek masy kawałków, na które rozpadła się rakieta porusza się torze parabolicznym, po jakim poruszałaby się rakieta, gdyby nie uległa rozpadowi, aż do chwili spadku pierwszych fragmentów rakiety na ziemię

Zasada zachowania pędu układu

Pęd układu $\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n$

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\Delta (m_1 \vec{v}_1)}{\Delta t} + \ldots + \frac{\Delta (m_n \vec{v}_n)}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + \ldots + m_n \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} \qquad \vec{a}$$

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \sum m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{wyp}$$

Jeżeli suma wektorowa sił zewnętrznych równa się zeru , to pęd układu pozostaje stały

$$\boxed{\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}_{wyp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const}$$

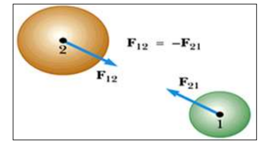
Zasada zachowania pędu

Pęd układu $\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n$

Dla dwu ciał

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2$$



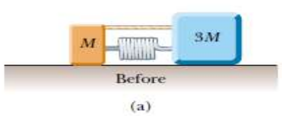
Założenie : suma sił zewnętrznych równa się zeru.

$$\Delta p_1 = F_{21} \Delta t \qquad \Delta p_2 = F_{12} \Delta t$$

$$\Delta \vec{P} = (F_{21} + F_{12}) \Delta t = 0$$

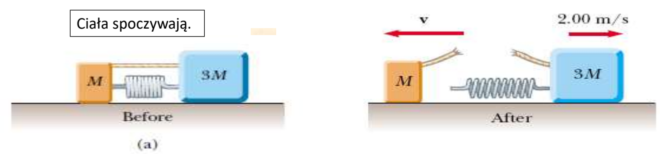
$$\boxed{\sum \vec{F}_{zew} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{P} = 0}$$

Ciała spoczywają. Jak zmieni się ruch ciał gdy pozostaną one połączone po zerwaniu wiązania ?



przykład

Ciała spoczywają.



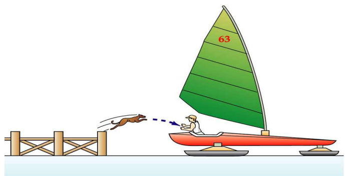
$$P_c = 0$$

$$-M v_L + 3 M v_p = 0$$

$$v_L = 3 v_p$$

Ciała spoczywają. Jak zmieni się ruch ciał gdy pozostaną one połączone po zerwaniu wiązania ?

Przykład.



Pies o masie m_1=14 kg biegnący z prędkością v_1=32 km/godz. wskakuje na stojącą „łódkę” o masie m_2=160 kg. Wyznacz prędkość „łódki” razem z psem oraz zmianę energii kinetycznej układu.

$$p_p = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad , \quad p_k = (m_1 + m_2) v \quad , \quad p_p = p_k$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0.7 \text{ m/s}$$

$$E_{k,pocz} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{14 \times (8.9)^2}{2} = 552 \text{ J} \; , \; E_{k,konc} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} = 44 \text{ J}$$

Co się stało z energią ?

Zderzenia doskonale sprężyste

W czasie zderzeń doskonale sprężystych zachowany zostaje

1. pęd układu
2. energia kinetyczna układu.

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2)} \\ m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2) \end{cases}$$

$$\boxed{v_1 + u_1 = u_2 + v_2}$$

Zderzenia doskonale sprężyste

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2) \\ v_1 + u_1 = u_2 + v_2 \end{cases}$$

$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2$$

$$\boxed{u_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$$

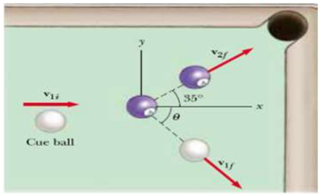
Analiza. Doskonale sprężyste zderzenie centralne dwu ciał o jednakowych masach. Ciało 2 spoczywało:

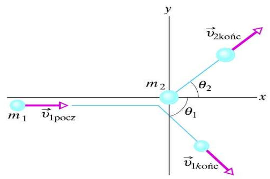
$$u_1 = \frac{0 v_1 + m_2 0}{m_1 + m_2} = 0 \qquad u_2 = v_1 + u_1 - v_2 = v_1$$

Doskonale sprężyste zderzenie centralne dwu ciał o jednakowych masach. Ciało 2 spoczywało:

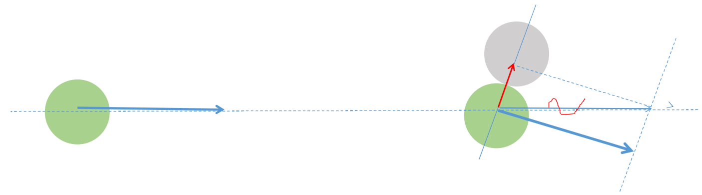
$$u_1 = \frac{0 v_1 + m_2 0}{m_1 + m_2} = 0 \qquad u_2 = v_1 + u_1 - v_2 = v_1$$

Zderzenia doskonale sprężyste

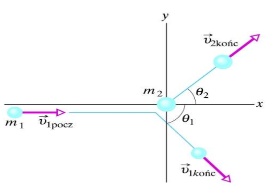




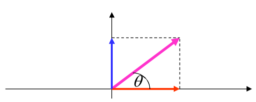
Rys. 10.16. Sprężyste zderzenie niecentralne dwóch ciał. Ciało o masie m_2 (tarcza) jest przed zderzeniem nieruchome



Zderzenia



Rys. 10.16. Sprężyste zderzenie niecentralne dwóch ciał. Ciało o masie m_2 (tarcza) jest przed zderzeniem nieruchome



$$v_{2kx} = v_{k2}\cos\theta$$

$$\boxed{m_1\vec{v}_{1p} = m_1\vec{v}_{1k} + m_2\vec{v}_{2k}}$$

$$m_1 v_{1p} = m_1 v_{1k,x} + m_2 v_{2k,x}$$

$$0 = m_1 v_{1k,y} + m_2 v_{2k,y}$$

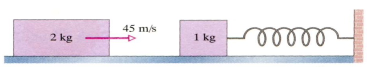
$$m_1 v_{1p} = m_1 v_{1k}\cos\theta_1 + m_2 v_{2k}\cos\theta_2$$

$$m_1 v_{1k}\sin\theta_1 + m_2 v_{2k}\sin\theta_2 = 0$$

Dla zderzeń doskonale sprężystych:

$$\frac{m_1 v_{1p}^2}{2} = \frac{m_1 v_{1k}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2k}^2}{2}$$

34. Klocek o masie l kg znajduje się w spoczynku na poziomej powierzchni, po której może poruszać się bez tarcia. Klocek ten jest przymocowany do jednego końca sprężyny o stałej sprężystości k = 200 N/m. Drugi koniec sprężyny jest unieruchomiony, a sprężyna jest nieodkształcona (rys. 10.34). W pewnej chwili z klockiem tym zderza się drugi klocek o masie 2 kg, poruszający się z prędkością 4 m/s. Wyznacz maksymalne ściśnięcie sprężyny odpowiadające chwili, w której prędkość klocków jest równa zeru, jeśli w trakcie zderzenia w jednym wymiarze klocki poruszają się razem.



$$(m_1 + m_2)u = m_2 v_2$$

$$u = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}$$

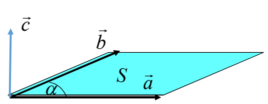
Równania ruchu (równania Newtona)

Zasada zachowania energii

Zasada zachowania pędu

Ruch obrotowy

Iloczyn wektorowy dwu wektorów

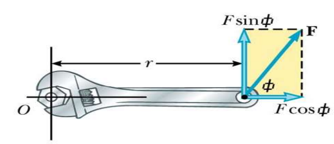


$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$$

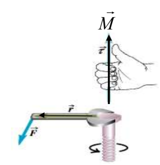
$$\vec{c} \perp \vec{a} \quad \text{i} \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

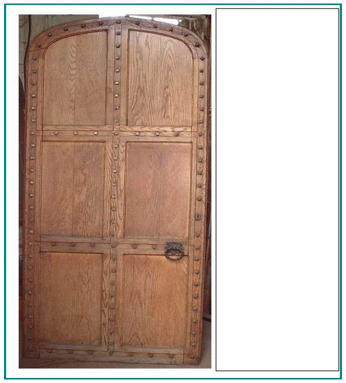
Moment siły

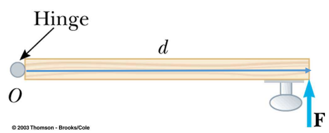


$$M = r\,F\,\sin\phi$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

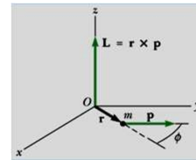






$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{d}\times\vec{F}\right| = dF\sin(90)$$

Moment pędu punktu materialnego



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}}$$

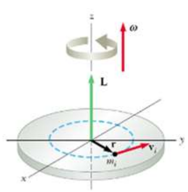
$$L = rp\sin\phi$$

<u>Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego</u>

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}$$

Moment pędu bryły sztywnej obracającej się wokół sztywno zamocowanej osi

Dla bryły sztywnej obracającej się wokół sztywno zamocowanej osi



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}}$$

$$L = \sum_i r_i \cdot v_i m_i \;\; = \sum_i r_i^2 \omega m_i$$

$$L = \underbrace{\left(\sum_i r_i^2 m_i\right)}_{= I}\omega = I\cdot\omega$$

$$L = I\cdot\omega$$

I – moment bezwładności