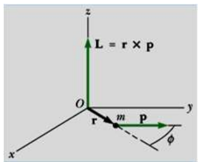
Moment pędu punktu materialnego



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

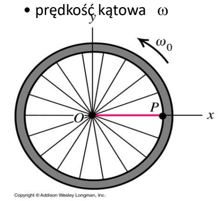
$$L = rp \sin \phi$$

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

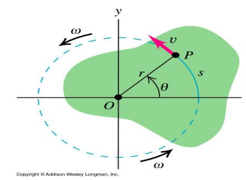
$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}$$

Ruch obrotowy bryły sztywnej obracającej się wokół sztywno zamocowanej osi

• prędkość kątowa ω



$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$



• stała prędkość kątowa ω

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r \quad \Rightarrow \quad \omega = v / r$$

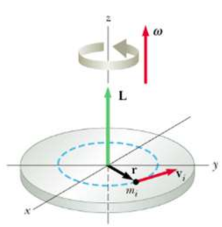
• stałe przyspieszenie kątowe

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{r \Delta t} = \frac{1}{r} a}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t \qquad \theta = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} + \theta_0$$

Moment pędu bryły sztywnej obracającej się wokół sztywno zamocowanej osi

Dla bryły sztywnej obracającej się wokół sztywno zamocowanej osi



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

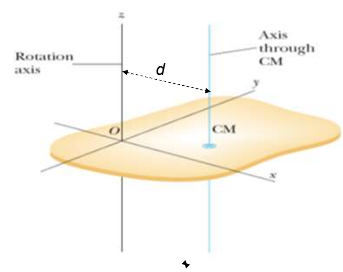
$$L = \sum_i r_i \cdot v_i m_i = \sum_i r_i^2 \omega m_i$$

$$L = \underbrace{\left(\sum_i r_i^2 m_i \right)}_{= I} \omega = I \cdot \omega$$

$$L = I \cdot \omega$$

I – moment bezwładności

Moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy



$$I_p = I_{cm} + md^2$$

m – masa bryły

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

$$L = I\omega \quad \Rightarrow \quad \Delta L = I\Delta\omega + \Delta I\,\omega$$

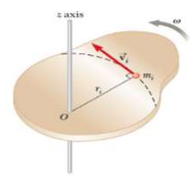
$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = I\underbrace{\frac{\Delta\omega}{\Delta t}}_{=\varepsilon} + \frac{\Delta I}{\Delta t}\omega$$

Jeżeli moment bezwładności nie ulega zmianie

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = I\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = I\varepsilon}$$

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\ ;\ \vec{F} = m\vec{a}$	$\frac{\Delta L}{\Delta t} = M\ ;\quad M = I\varepsilon$

Energia kinetyczna bryły sztywnej wokół sztywno zamocowanej osi *Oz*



$$v_i = \omega r_i$$

Podzielmy naszą bryłę na małe fragmenty o masie m_i położone w odległości r_i od osi Oz

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(r_i\,\omega\right)^2$$

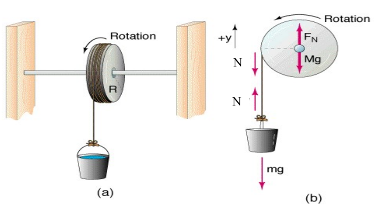
$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

I - Moment bezwładności względem osi *Oz*

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

Przykład. Wyznaczyć przyspieszenie wiadra



$$m a = m g - N$$

$$R N = I\varepsilon \quad ; \quad \varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$N = I\frac{a}{R^2}$$

$$m a = m g - I\frac{a}{R^2}$$

$$a = \frac{m g}{m + \frac{I}{R^2}}$$

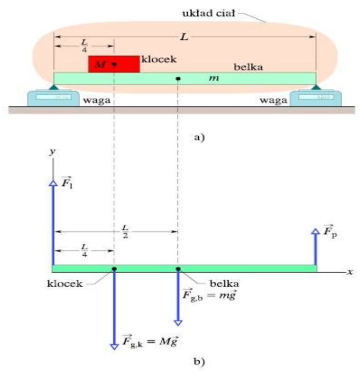
- Statyka – warunki równowagi

1. Nie przemieszcza się jako całość

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

2. Nie obraca się lub obraca się ze stałą prędkością kątową

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$



Rys. 13.5. Przykład 13.1. a) Belka o masie m podtrzymuje klocek o masie M. b) Diagram sił działających na układ *belka + klocek*

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{gk} + \vec{F}_{gb} = 0$$

$$F_1 \cdot 0 + F_p \cdot L - F_{gk} \cdot \frac{1}{4} L - F_{gb} \cdot \frac{1}{2} L = 0$$

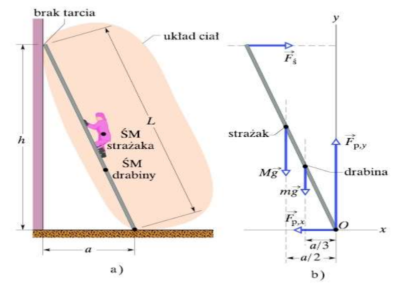
W postaci skalarnej

$$F_1 + F_p - F_{gk} - F_{gb} = 0$$

$$F_p L - \frac{1}{4} L F_{gk} - \frac{1}{2} L F_{gb} = 0$$

$$F_p = \frac{1}{4} F_{gk} + \frac{1}{2} F_{gb}$$

Wyznaczyć siły działające na ścianę i na podłogę.



Rys. 13.6. Przykład 13.2. a) Strażak wspinający się po drabinie opartej o gładką ścianę i o szorstkie podłoże znajduje się w połowie wysokości drabiny. b) Diagram sił działających na układ strażak–drabina. Początek układu współrzędnych O wybrano w punkcie, w którym przyłożona jest jedna z nieznanych sił $\vec{F}_p$ (na rysunku pokazano składowe tej siły $\vec{F}_{p,x}$ i $\vec{F}_{p,y}$)

$$F_{p,y} = Mg + mg$$

$$Mg \cdot \frac{a}{2} + mg \cdot \frac{a}{3} = F_s \cdot h$$

Zasada zachowania momentu pędu

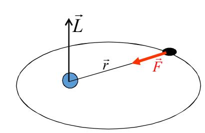
Jeżeli moment sił zewnętrznych jest równy zeru to moment pędu jest zachowany

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{L} = 0$$

Ruch postępowy	Ruch obrotowy
$\sum \vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{p} = const$	$\vec{M} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{L} = const$

Tor w polu sił centralnych jest torem płaskim

Siła pola zależy jedynie od odległości i jest skierowana wzdłuż prostej łączącej punkt materialny z centrum pola



$$\vec{F} \parallel \vec{r}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

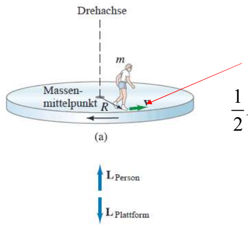
$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin 0 = 0$$

$$\vec{M} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{L} = 0$$

$$\Delta \vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

Przykłady zastosowań zasady zachowania pędu

$$\vec{L} = 0$$



Prędkość względem platformy

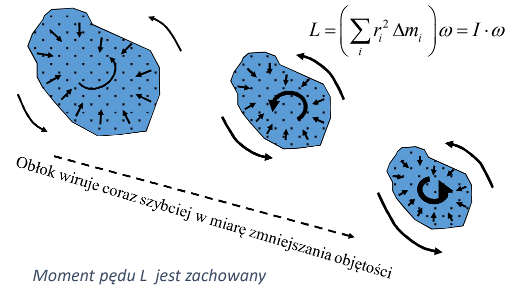
$$\frac{1}{2}MR^2\omega + m\left(\omega R - v\right)R = 0$$

Prędkość względem ziemi

$$\vec{L}_{Person} + \vec{L}_{Platform} = 0$$

$$\vec{L}_{Person} = -\vec{L}_{Platform}$$

Kolaps grawitacyjny



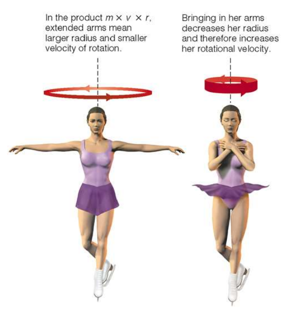
$$L = \left(\sum_i r_i^2 \Delta m_i\right)\omega = I \cdot \omega$$

Moment pędu L jest zachowany

$$L = I \cdot \omega$$

Maleje *I*, rośnie ω

Przykłady zastosowań zasady zachowania pędu



$$L = \left(\sum_i r_i^2 \Delta m_i\right)\omega = I \cdot \omega$$

© 2005 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley