Szczególna teoria względności

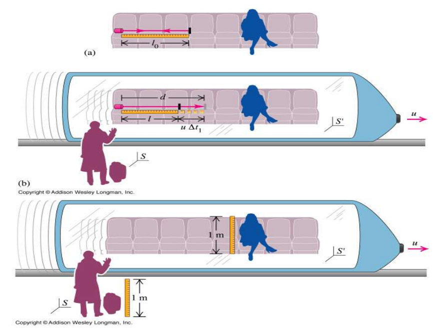
Postulaty Einsteina:

I. Prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

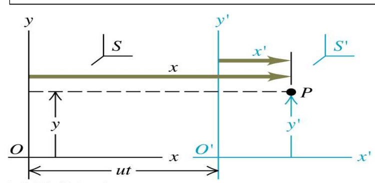
II. Prędkość światła w próżni jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Pomiar długości

Czy obydwaj obserwatorzy mierzą tą samą długość pręt ?



Transformacje



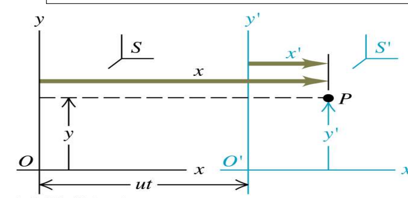
Transformacje Galileusza:

$$x' = x - ut \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

$$x = x' + ut \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'$$

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1 = l_0$$

Transformacje



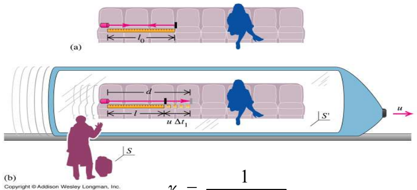
Transformacje Lorentza:

$$x' = \gamma\left(x - ut\right) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{xu}{c^2}\right)$$

$$x = \gamma\left(x' + ut'\right) \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{x'u}{c^2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

„Skrócenie długości”



$$l_0 = x_2' - x_1'$$

$$x' = \gamma\left(x - ut\right)$$

$$l_0 = \gamma(x_2 - ut) - \gamma(x_1 - ut)$$

$$l_0 = \gamma(x_2 - x_1)$$

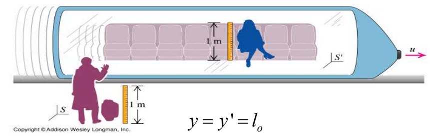
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$l_0 = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{1 - (u/c)^2} \cdot l_0}$$

„Skrócenie długości”

Długość w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu układu



$$y = y' = l_o$$

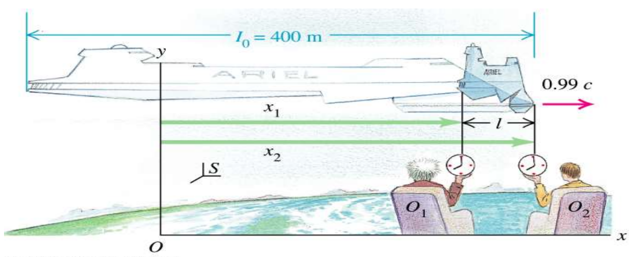
$$\boxed{l_\perp = l_\perp'}$$

Obserwatorzy w obydwu układach podają taką samą wartość długości

Przykład

- Załoga statku kosmicznego mierzy jego długość i otrzymuje wynik 400m. Jaką długość statku zmierzy obserwator na Ziemi, jeśli wiadomo, że prędkość statku względem Ziemi u = 0.8c ?

$$l = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = 400\sqrt{1 - (0.8c/c)^2} = 400\sqrt{1 - 0.64} = 240\ m$$



Równoczesność zdarzeń

Dwa zdarzenia zachodzą w układzie *S'* w tym samym punkcie *x'* = *a* i w tej samej chwili *t'*

$$t = \gamma\left(t' + \frac{x'u}{c^2}\right)$$

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t' + \frac{x'u}{c^2}\right) - \gamma\left(t' + \frac{x'u}{c^2}\right)$$

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(\cancel{t'} + \cancel{\frac{au}{c^2}} - \cancel{t'} - \cancel{\frac{au}{c^2}}\right) = 0$$

Zdarzenia jednoczesne, zachodzące w tym samym punkcie w jednym inercjalnym u.w. są równoczesnymi w każdym innym układzie inercjalnym.

Czas pomiędzy dwoma zdarzeniami

Zdarzenia zachodzą w tym samym punkcie $x' = a$ układu poruszającego się (S') *ale* w *różnych* chwilach, t_1' oraz t_2'

$$t = \gamma\left(t' + \frac{x'u}{c^2}\right)$$

W układzie spoczywającym
$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' + \frac{x_2' u}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1' + \frac{x_1' u}{c^2}\right)$$

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' + \cancel{\frac{a\,u}{c^2}} - t_1' - \cancel{\frac{a\,u}{c^2}}\right) = \gamma\,(t_2' - t_1')$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

czas własny

Obserwator w układzie spoczywającym stwierdzi, że zdarzenie trwało **dłużej**.

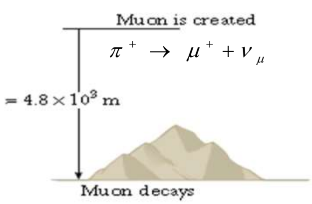
Czas pomiędzy dwoma zdarzeniami

Przykład

- Statek kosmiczny wysyła impulsy świetlne trwające wg astronautów na statku $2x10^{-6}$s *(układ poruszający się)*. Jak długo trwają te impulsy wg obserwatora na Ziemi (*układ spoczywający*) , jeżeli statek porusza się względem Ziemi z prędkością v=0.6c?

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{2x10^{-6}\,s}{\sqrt{1-\frac{0.36c^2}{c^2}}} = 2.5x10^{-6}\,s$$

Czas życia mionów



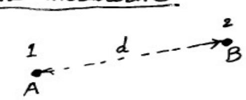
- Miony powstają w górnych warstwach atmosfery w wyniku rozpadu pionów
- Miony poruszają się z prędkościami bliskimi prędkości światła
- Ich czas życia w „spoczynku" $\tau = 2.2x10^{-6}$ s
- W takim czasie powinny przebyć odległość nie większą niż 600m zanim ulegną rozpadowi

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu$$

- Tymczasem względem Ziemii przebywają one odległość rzędu 4.8km

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

Zdarzenia niezależne



Zdarzenie A w chwili t_1
Zdarzenie B w chwili t_2 $\Big\}$ $\Delta t = t_2 - t_1$

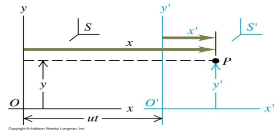
Światło potrzebuje czasu $\tau = \frac{d}{c}$ aby przebyć drogę d.

Zdarzenia niezależne gdy

$$\tau > \Delta t \Rightarrow d > c\cdot\Delta t$$

Transformacja prędkości

Załóżmy, że pewna cząstka porusza się z prędkością u wzdłuż osi Ox. Powiążmy z tą cząstką nowy u.w.



$$x' = \gamma\,(x - ut) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{xu}{c^2}\right)$$

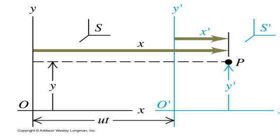
$$\Delta x' = \gamma\,(\Delta x - u\,\Delta t) \qquad \Delta t' = \gamma\,(\Delta t - u\,\frac{\Delta x}{c^2})$$

$$v_{x'} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma\,(\Delta x - u\,\Delta t)}{\gamma\,(\Delta t - u\,\frac{\Delta x}{c^2})} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

$$\boxed{v_{x'} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}} \qquad \boxed{v_x = \frac{v_{x'} + u}{1 + \frac{u}{c^2}v_{x'}}}$$

Transformacja prędkości

Teraz ta cząstka porusza się w kierunku osi *Oy*, a ruch jej jest obserwowany przez obserwatora w układzie *O'x'*



$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta t' = \gamma\,(\Delta t - u\,\frac{\overset{=0}{\Delta x}}{c^2}) = \gamma\Delta t$$

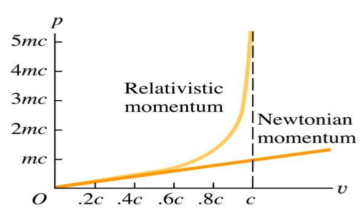
$$\boxed{v_{y'} = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma\Delta t} = v_y\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Druga zasady dynamiki

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}}$$

Relatywistyczny pędu

$$\vec{p} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\vec{u}$$



Równoważność masy i energii

$$E = mc^2 \quad \text{gdzie} \quad m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Związek między energią całkowitą cząstki a jej pędem i masą spoczynkową

$$E = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}$$

Pęd cząstki o zerowej masie spoczynkowej, $m_0=0$

$$E = c\sqrt{0 + p^2} \;\Rightarrow\; p = \frac{E}{c}$$

Pęd fotonu: $p = \frac{h\nu}{c}$

Energia kinetyczna cząstki

$$\boxed{T = mc^2 - m_0c^2}$$

Przypadek małych prędkości: $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ blskie 0, czyli $v \ll c$

Skorzystajmy z rozwinięcia : $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$

$$m = m_0\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2} = m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \cdots\right] \cong m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]$$

$$K \cong \left(m_0 + \frac{1}{2}\frac{m_0v^2}{c^2} - m_0\right)c^2 = \frac{1}{2}m_0v^2$$

- energia kinetyczna produktów rozpadu spoczywającego jądra uranu

$${}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{141}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 3\,{}^{1}_{0}n$$

$$(T + mc^2)_{początkowa} = (T + mc^2)_{końcowa}$$

$$0 + m_nc^2 + m_Uc^2 = m_{Ba}c^2 + m_{Kr}c^2 + 3m_nc^2 + KE_{final}$$

$KE_{final} = [(m_n + m_U) - (m_{Ba} + m_{Kr} + 3m_n)]c^2 = (1.008665\ \mathrm{u} + 235.043924\ \mathrm{u})c^2 -$
$[140.903496\ \mathrm{u} + 91.907936\ \mathrm{u} + 3(1.008665\ \mathrm{u})]c^2 = (0.215162\ \mathrm{u})(931.494\ \mathrm{MeV}/(\mathrm{u}\cdot\mathrm{c}^2))]c^2$
$\approx 200\ \mathrm{MeV}$