Równanie fali

W punkcie x=0 znajduje się źródło fali powodujące zaburzenia ośrodka wg równania

$$y(0,t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Zaburzenie to dociera do punktu x=b po czasie

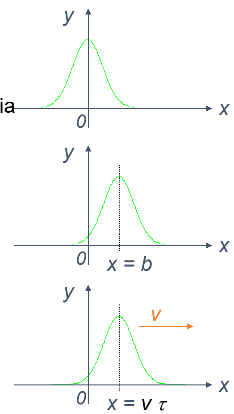
$$\tau = \frac{x}{v} = x\frac{2\pi T}{2\pi T v} = x\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{T}{2\pi} = \frac{k}{\omega}x$$

Zmiany w punkcie x=b są opóźnione o τ względem zmian w punkcie x=0

$$y(x,t) = A\cos(\omega(t-\tau)+\phi)$$

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \phi)$$

$$y(x,t) = A\cos(-(-\omega t + kx - \varphi)) = A\cos(kx - \omega t - \phi)$$



Funkcja falowa

Zgodnie z hipotezą de Broglie'a, cząstki takie jak elektron czy proton, mają własności falowe.

Własności falowe cząstki (lub innego obiektu) w mechanice kwantowej opisuje tzw. funkcja falowa $\Psi(x,t)$:

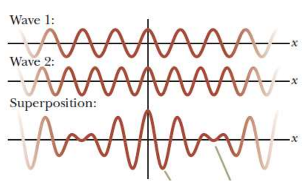
- zawiera w sobie wszystkie informacje o obiekcie (np. cząstce)
- w ogólnym przypadku jest to funkcja zespolona współrzędnych przestrzennych oraz czasu
- musi być funkcją ciągłą , a także musi mieć ciągłą pochodną
- Kwadrat modułu funkcji falowej

$$|\psi|^2 = \psi^*\psi$$

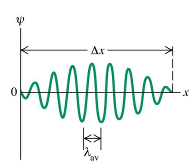
jest **gęstością prawdopodobieństwa** znalezienia cząstki w chwili *t* w pewnym punkcie przestrzeni

$$pr_{\Delta V} = |\psi|^2\,\Delta V$$

Cząstka swobodna - paczka falowa



$$\Psi(x) = \sum_i A(\lambda_i)\sin\frac{2\pi}{\lambda_i}x$$



Zasada nieoznaczoności

- Fizyka klasyczna
  - dokładność pomiaru jest zdeterminowana jedynie jakością aparatury pomiarowej
  - Nie ma teoretycznych ograniczeń na dokładność z jaką mogą być wykonane pomiary
- Mechanika kwantowa
  - Obowiązuje zasada nieoznaczoności: pewnych wielkości fizycznych nie można zmierzyć równocześnie z dowolną dokładnością

Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru pędu i położenia:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar / 2$$

Przykład. Zmierzono z dokładnością ±0.001 m/s prędkość elektronu . Z jaką maksymalną dokładnością można było wyznaczyć położenie tego elektronu?

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = 5.8\,\mathrm{cm}$$

Zasada nieoznaczoności

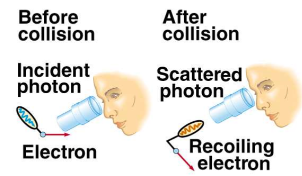
- Prędkość kuli o masie *m*=6kg zmierzono z dokładnością do 0.001 m/s

$$\Delta p = m\Delta v$$

- Dokładność wyznaczenia położenia:

$$\boxed{\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = 8.8\times 10^{-33}\,m}$$

Zasada nieoznaczoności – inna interpretacja



Proces pomiaru zaburza stan układu

Zasada nieoznaczoności dla energii

W 1927 roku Heisenberg sformułował fundamentalną własność mechaniki kwantowej, która mówi, że niemożliwe jest dokładne równoczesne zmierzenie energii jak i czasu. Im dokładniej określimy jedno, tym mniej wiemy o drugim. Nazywane jest to **Zasadą Nieoznaczoności Heisenberga**.

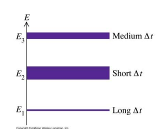
Matematyczna formuła jest następująca.

$$\Delta E\ \Delta t \geq \hbar/2$$

Zasada nieoznaczoności energii

Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru energii i czasu:

$$\Delta E \Delta\tau \geq \hbar/2$$



Przykład: Czas przebywania atomu sodu w stanie wzbudzonym zmierzono z dokładnością Δt=1.6 •10^{-8} s. Z jaką maksymalną dokładnością można było wyznaczyć wartość energii tego stanu?

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{6.6\cdot 10^{-16}\,\mathrm{eV}\times\mathrm{s}}{2\cdot 1.6\cdot 10^{-8}\,s} \approx 2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{eV}$$

Zasada nieoznaczoności dla energii

Przykład 1: Czy jest możliwe aby **zaobserwowano**, że w pewnym miejscu w próżni pojawiła się znikąd cząstka o energii 10^{-8} eV, a następnie zniknęła po czasie Δt=1.6 •10^{-9} s ?

Aby można było zaobserwować taką cząstkę jej energia musi być większa niż:

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \approx 2 \cdot 10^{-7} eV$$

Nie można zaobserwować istnienia takiej cząstki.

Czy jednak takie procesy mogą zachodzić??

Odpowiedź: Tak . Energia cząstki jest mniejsza od nieoznaczoności wynikającej z zasady nieoznaczoności . Jej pojawienie się nie przeczy zasadzie zachowania energii. Cząstki takie nazywamy cząstkami wirtualnymi.

Zasada nieoznaczoności energii

Przykład 2: Analizując pewne zjawisko do wyjaśnienia jego własności założono, że w próżni pojawiła się znikąd cząstka i zniknęła po czasie Δt=1.6 •10^{-8} s. Jej energia całkowita wynosiła 10^{-8} eV. Czy jest to możliwe?

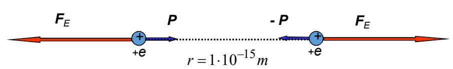
Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru energii i czasu:

$$\Delta E \Delta \tau \geq \hbar / 2$$

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \approx 2 \cdot 10^{-8} eV$$

Odpowiedź: Tak . Energia cząstki jest mniejsza od nieoznaczoności wynikającej z zasady nieoznaczoności, zatem taka cząstka mogła powstać, ale jej czas życia musiał być mniejszy niż 16 ns.

Co trzyma protony w jądrze He ???



Siła grawitacji $P = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{(9.1 \cdot 10^{-31})^2}{(10^{-15})^2} = 5.52 \cdot 10^{-41} N$

Siła elektrostatyczna $F_E = \frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-15})^2} = 230N$

$F_E >> P$ ⇨ istnieje zatem jakieś inne oddziaływanie

Oddziaływanie jądrowe

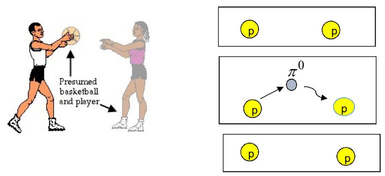
Siły jądrowe są :

a) krótkozasięgowe - ich zasięg działania jest rzędu 10^{-15} m,

b) niezależne od ładunku elektrycznego,

c) wykazują własność wysycenia, tzn. każdy nukleon oddziaływuje tylko z ograniczoną liczbą innych nukleonów.

Oddziaływanie jądrowe

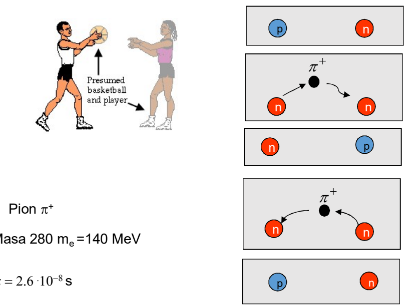


Pion π^0

Masa 268 m_e

$\tau = 8.4 \cdot 10^{-7}$ s

Oddziaływanie jądrowe



Pion π^+

Masa 280 m_e =140 MeV

$\tau = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s

Skąd się bierze się pion w protonie ?

W 1927 roku Heisenberg sformułował fundamentalną własność mechaniki kwantowej, która mówi, że niemożliwe jest dokładne równoczesne zmierzenie energii jak i czasu. Im dokładniej określimy jedno, tym mniej wiemy o drugim. Nazywane jest to **Zasadą Nieoznaczoności Heisenberga**.

Matematyczna formuła jest następująca.

$$\Delta E \, \Delta t \geq \hbar/2$$

Zasięg oddziaływania

Czy piony są „rzeczywistymi" cząstkami ??? Nie. To są cząstki wirtualne

Energia pionu π^+ $E=mc^2 = 2.4 \cdot 10^{-11}$ J

Jak długo może taki pion istnieć ?

Maksymalny czas życia

$$\tau = \frac{h}{2\pi E} = 4 \cdot 10^{-24} s$$

Maksymalna do przebycia droga

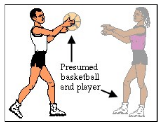
$$s = \tau \cdot c = 1.4 \cdot 10^{-15} m$$

Siły jądrowe są :

krótkozasięgowe - ich zasięg działania jest rzędu 10^{-15} m,

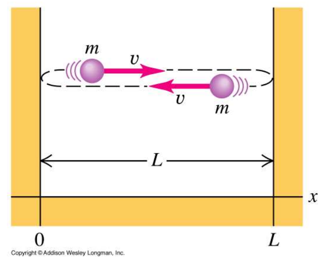
Oddziaływania elementarne

- oddziaływanie grawitacyjne
- oddziaływanie elektromagnetyczne
- oddziaływanie jądrowe



Cząstka w studni potencjału

1. Przypadek klasyczny

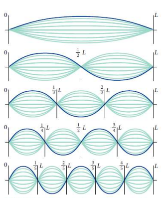


Znajdująca się w głębokiej studni piłka może posiadać dowolną energię kinetyczną.

W szczególnym przypadku gdy znajduje się w spoczynku na dnie studni posiada energię całkowitą równą zeru .

Fale stojące - przypomnienie

- Rozpatrzmy interferencję dwu fal o jednakowych częstotliwościach, rozchodzących się w przeciwnych kierunkach



$y_R(x,t) = A \sin(kx-\omega t)$

$y_L(x,t) = A \sin(kx+\omega t)$

Ponieważ

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$y_{SUM}(x,t) = \underbrace{2A\sin(kx)}_{\text{amplituda}}\ \underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{Część oscylacyjna}}$$

amplituda jest zerowa w punktach dla których $kx_{min} = 0 + n\pi$, czyli

$$x_{\min} = \frac{\pi}{k}n = n\cdot\frac{\lambda}{2}$$

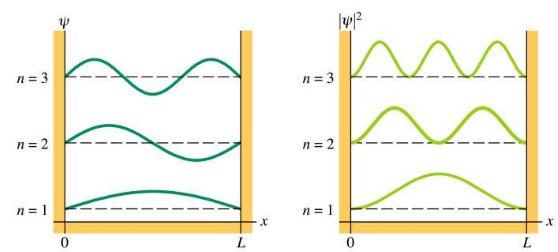
Odległość pomiędzy punktami o zerowej amplitudzie

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2}(n+1) - n\cdot\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

Cząstka w studni potencjału -wnioski

Funkcja falowa : $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(kx)$

Wewnątrz studni powstaje fala stojąca materii z węzłami na brzegach studni.



$$pr_{\Delta V} = |\psi|^2\,\Delta V$$

Elektron w nieskończonej studni potencjału

Wewnątrz studni powstaje fala stojąca materii z węzłami na brzegach studni.

$$\Psi(x) = A\sin(kx) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad E_K = \frac{mv^2}{2}\frac{m}{m} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

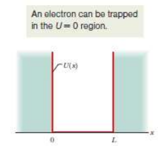
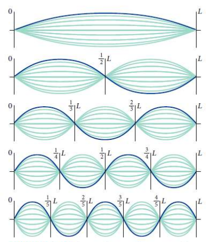


Figure 39-2 The electric potential energy $U(x)$ of an electron confined to the central cylinder of the idealized trap of Fig. 39-1. We see that $U = 0$ for $0 < x < L$, and $U \to \infty$ for $x < 0$ and $x > L$.



$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\lambda_m = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda_m}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda_m^2}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2}n^2$$

$$L = n\Delta x_{zero} = n\frac{\lambda_m}{2}$$

$$\lambda_m = \frac{2L}{n}$$

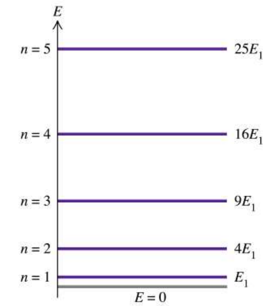
$$\boxed{E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2}$$

Cząstka w studni potencjału -wnioski

W nieskończonej studni potencjału energia cząstki może przyjmować tylko pewne ściśle określone, różne od zera wartości:

$$\boxed{E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2} \quad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Psi(x) = A\sin(kx)$$



Cząstka w studni potencjału -wnioski

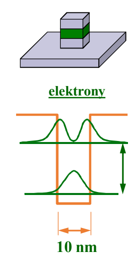
Czy energia może być równa zero?

$$\boxed{E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2}$$

$$E = 0 \Rightarrow n = 0$$

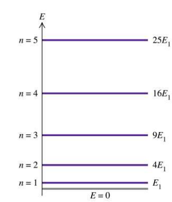
Wewnątrz studni nie ma cząstki

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o zerowej energii wynosi zero.



Poziomy energetyczne elektronu można kontrolować wielkością i kształtem kropki

$$\boxed{E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2}$$



These containers hold solutions of microscopic semiconductor particles of different sizes. The particles glow when exposed to ultraviolet light; the smallest particles glow blue and the largest particles glow red. Why?

Kwantowanie energii

- Energia dowolnego obiektu jest skwantowana. Obiekt znajduje się na jednym z dozwolonych poziomów energetycznych
- Zmiana energii układu może odbywać się wyłącznie porcjami - *kwantami*
- W makroświecie odległość pomiędzy najbliższymi poziomami energetycznymi jest niemierzalnie mała

Cząstka w studni potencjału -wnioski

Przykład 1

Pyłek o masie 1 g w studni o szerokości 1 cm

a) minimalna energia

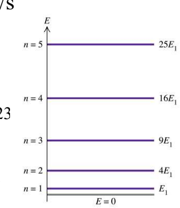
$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63\cdot10^{-34}J\cdot s)^2}{8\cdot10^{-6}kg\cdot10^{-2}m} = 5.49\cdot10^{-58}J = 3.43\cdot10^{-39}eV$$

b) nr poziomu gdy porusza się z prędkością 3cm/s

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 = 4.5\cdot10^{-10}J$$

$$E_n = n^2E_1 \;\Rightarrow\; n = \sqrt{E_n/E_1} = 9.05\cdot10^{23}$$

$$E_{n+1} - E_n = (2n+1)E_1 \approx 6.2\cdot10^{-15}eV$$



Cząstka w studni potencjału -wnioski

Przykład 2

Elektron o masie $9.11x10^{-31}$ g w studni o szerokości 2 nm.

a) minimalna energia

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63\cdot10^{-34}J\cdot s)^2}{8\cdot(9.11\cdot10^{-34}kg)\cdot(2\cdot10^{-10}m)} = 1.51\cdot10^{-18}J = 0.09eV$$

b) poziomy drugi i trzeci

$$E_2 = 4\cdot E_1 = 0.36\,\text{eV}$$
$$E_3 = 9E_1 = 0.81\,\text{eV}$$

$$E_2 - E_1 = 0.27\,eV$$ Daleka podczerwień